SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

ALCUNE OSSERVAZIONI SU CERTE CONDIZIONI NECESSARIE PER LA BUONA POSITURA DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN SPAZI DI GEVREY

14 APRILE 1988

Intendiamo presentare qui alcune osservazioni e risultati preliminari connessi con problemi trattati da diversi punti di vista da vari autori, in particolare da H. Komatsu [3], S. Mizohata [5], F. Colombini-E. De Giorgi-S. Spagnolo [1][1)].

§1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(1.1)\quad \begin{cases} (\partial_t+i\lambda(t,x,D_x)+a(t,x,D_x))u = 0 & (t,x)\in[0,T]\times R^n \\ u(o,x) = g(x) & x\in R^n. \end{cases}$$

ove $\lambda(t,x,\xi)$ ha valori reali, $\lambda\in C([0,T];S^{1,s,1})$; $a\in C([0,T];\ S^{p,s,1})$ $p\in]0,1[$, $s>1$.

Sia poi

$$\gamma^{\{s\}}_{L^2} = \{\phi\in C^\infty(R^n);\ \exists A>0:\ \sup_\alpha \alpha!^{-s}A^{-|\alpha|}\|D^\alpha\phi\|_{L^2}\}< +\infty\ .$$

Il problema (1.1) si dice ben posto in $\gamma^{\{s\}}_{L^2}$ se $\forall g\in\gamma^{\{s\}}_{L^2}$ esiste una ed una sola soluzione $u(t,x)$ di (1) tale che $u(t,\cdot)\in\gamma^{\{s\}}_{L^2}$, $\forall t\in[0,T]$.

In [5] Mizohata prova mediante un metodo di "energia microlocale" il

Teorema 1.1. *Supposto che* λ *sia omogenea di grado* 1 *in* ξ *ed*

i) $\quad a(t,x,\xi) = \mathring{a}(t,x,\xi) + a'(t,x,\xi)$

ove $\mathring{a}\in C([0,T];\ S^{P,s,1})$ *è omogenea di grado* $p\in]0,1[$ *in* ξ *ed* a' *è di ordine* $<p$, *una condizione necessaria affinché il problema* (1.1) *sia ben posto in* $\gamma^{\{s\}}_{L^2}$

---

1) Si veda anche S. Spagnolo [7].

quando s>1/p *è che*

$$\mathrm{Re}\,\overset{\circ}{a}(x,o,\xi) \geq 0 \qquad \forall(x,\xi) \in R^n x R^n .$$

La buona positura del problema (1.1) in spazi di Gevrey di indice s, quando $s \in]1,1/p[$ è stata dimostrata da vari autori[2].

In vista di estendere il risultato del Teorema 1.1 al problema di Cauchy per sistemi iperbolici del tipo

$$\begin{cases} (\partial_t I + i\Lambda(t,x,D_x) + A(t,x,D_x))u = 0 & (t,x) \in [0,T] \times R^n \\ u(o,x) = g(x) & x \in R^n \end{cases}$$

con Λ matrice hermitiana 2x2 di ordine 1 ed A matrice 2x2 di ordine p, equivalenti alle equazioni del secondo ordine con coefficienti hölderiani di ordine 1-p considerate in [1], appare necessario rinunciare ad ammettere su a ipotesi del tipo della i) del Teorema 1.1.

Esaminiamo qui il caso semplice in cui in (1.1) λ *ed* a *non dipendano da* x.

Anziché in $\gamma^{\{s\}}_{L^2}$ richiederemo che (1.1) sia ben posto in spazi di funzioni e di ultra distribuzioni di Gevrey definiti in [6] da V.P. Palamodov.

Dati i numeri positivi s,μ,A,h sia

$$S^{s,A}_{\mu,h} = \{\phi \in C^\infty(R^n),\ \sup_{x,\alpha} \alpha!^{-s} A^{-|\alpha|} \exp(h|x|^{1/\mu})|D^\alpha_x\phi(x)| = \|\phi\|^{s,A}_{\mu,h} < +\infty\} .$$

$S^{s,A}_{\mu,h}$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\ \|^{s,A}_{\mu,h}$.

Se $A<A'$, $h'<h$ è $S^{s,A}_{\mu,h} \hookrightarrow S^{s,A'}_{\mu,h} \hookrightarrow S^{s,A'}_{\mu,h'}$. Si definiscono

---

2) Si veda per es. S. Mizohata [4], K. Taniguchi [8].

$$S^{\{s\}}_{\{\mu\}} = \varinjlim_{h\to 0+} \varinjlim_{A\to+\infty} S^{s,A}_{\mu,h} \quad , \quad S^{\{s\}}_{(\mu)} = \varprojlim_{h\to+\infty} \varprojlim_{A\to+\infty} S^{s,A}_{\mu,h} ,$$

$$S^{(s)}_{\{\mu\}} = \varinjlim_{h\to 0+} \varprojlim_{A\to 0+} S^{s,A}_{\mu,h} \quad , \quad S^{(s)}_{(\mu)} = \varprojlim_{h\to+\infty} \varprojlim_{A\to 0+} S^{s,A}_{\mu,h} .$$

In [6] è provato che

$$\mathscr{F}(S^{\{s\}}_{\{\mu\}}) = S^{\{\mu\}}_{\{s\}} \quad , \quad \mathscr{F}(S^{\{s\}}_{(\mu)}) = S^{(\mu)}_{\{s\}} ,$$

$$\mathscr{F}(S^{(s)}_{\{\mu\}}) = S^{\{\mu\}}_{(s)} \quad , \quad \mathscr{F}(S^{(s)}_{(\mu)}) = S^{(\mu)}_{(s)} ,$$

ove $\mathscr{F}$ indica la trasformazione di Fourier, definita da

$$\tilde{\phi}(\xi) = (\mathscr{F}\phi)(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathscr{S} .$$

Analoghe relazioni valgono per gli spazi duali $S^{\{s\}'}_{\{\mu\}}$, $S^{\{s\}'}_{(\mu)}$, $S^{(s)'}_{\{\mu\}}$, $S^{(s)'}_{(\mu)}$ degli spazi indicati. Così per es. $\mathscr{F}(S^{\{s\}'}_{\{\mu\}}) = S^{\{\mu\}'}_{\{s\}}$.

Consideriamo dunque il problema

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} (\partial_t + i\lambda(t,D_x) + a(t,D_x))u = 0 & (t,x) \in [0,T] \times R^n \\ u(o,x) = g(x) & x \in R^n , \end{cases}$$

con $\lambda(\cdot,\xi)$ ed $a(\cdot,\xi) \in L^1([0,T])$ per ogni $\xi \in R^n$ e tali che per una costante $A>0$

$$\text{(1.3)} \qquad \sup_{t,x}\ \sup_{\alpha}\ \alpha!^{-1} A^{-|\alpha|}(1+|\xi|)^{-1+|\alpha|}|\partial^\alpha_\xi \lambda(t,\xi)| < +\infty$$

e

$$(1.4) \qquad \sup_{t,x} \sup_{\alpha} \alpha!^{-1} A^{-|\alpha|}(1+|\xi|)^{-p+|\alpha|} |\partial_\xi^\alpha a(t,\xi)| < +\infty \quad , \quad p \in]0,1]$$

ed inoltre con λ avente valori reali.

Se $g \in S_{\{1\}}^{(1/p)}$ oppure $g \in S_{\{1\}}^{(1/p)'}$ e cerchiamo $u(t,x)$ appartenente ad uno di questi spazi per ogni $t \in [0,T]$ deve essere

$$\begin{cases} (\partial_t + i\lambda(t,\xi) + a(t,\xi))\tilde{u}(t,\xi) = 0 & (t,\xi) \in [0,T] \times R^n \\ \tilde{u}(0,\xi) = \tilde{g}(\xi) & \xi \in R^n \end{cases} ,$$

e quindi

$$(1.5) \qquad \tilde{u}(t,\xi) = \tilde{g}(\xi)\exp(-i\int_0^t \lambda(\tau,\xi)d\tau - \int_0^t a(\tau,\xi)d\tau) .$$

Da (1.5) segue che $\tilde{u}(t,\cdot) \in S_{(1/p)}^{\{1\}}$ oppure $\tilde{u}(t,\cdot) \in S_{(1/p)}^{\{1\}'}$ secondo che $g \in S_{\{1\}}^{(1/p)}$ oppure $g \in S_{\{1\}}^{(1/p)'}$. *Dunque* (1.2) *è ben posto in* $S_{\{1\}}^{(1/p)}$ *ed in* $S_{\{1\}}^{(1/p)'}$.

Supponiamo ora che esistano $t° \in [0,T]$, $\eta° \in R^n$, $|\eta°|=1$, $\sigma \in [1/p,s]$, una costante positiva c ed una successione $\rho_\nu \to +\infty$ per i quali

$$(1.6) \qquad \rho_\nu^{-1/\sigma} \int_0^{t°} \text{Re } a(\tau,\rho_\nu\eta°)d\tau \leq -c \qquad \nu = 1,\dots .$$

Osservato che se $s \geq 1/p$, $S_{\{1\}}^{\{s\}} \subset S_{\{1\}}^{\{s\}'} \subset S_{\{1\}}^{(s)'} \subset S_{\{1\}}^{(1/p)'}$, se $g \in S_{\{1\}}^{\{s\}}$ vale (1.5) e da questa segue che $\tilde{u}(t,\xi)$ è una funzione analitica in ξ. Quando inoltre $u(t°,\cdot) \in S_{\{1\}}^{\{s\}'}$ è $\tilde{u}(t°,\cdot) \in S_{\{s\}}^{\{1\}'}$ e quindi per ogni $\varepsilon>0$ esiste $c_\varepsilon>0$ tale che

$$|\tilde{u}(t°,\xi)| \leq c_\varepsilon \exp(\varepsilon|\xi|^{1/s}) \quad , \quad \xi \in R^n.$$

Dalla (1.5) ed (1.6) segue allora che

(1.7) $$|\tilde{g}(\rho_\nu n^\circ)| \leq c_\varepsilon \exp(-(c-\varepsilon\rho_\nu^{1/s-1/\sigma})\rho_\nu^{1/\sigma}), \quad \nu=1,\dots .$$

Sia ora

$$g(x) = \prod_{j=1}^{n} \psi(x_j) \text{ con } \psi(y) = \begin{cases} \exp(-h[(y-r)(r-y)]^{-1/(s-1)}) & \text{se } -r<y<r \\ 0 & \text{se } |y|\geq r, \end{cases}$$

$h>0$.

E' $g \in \mathscr{D} \cap S_{\{1\}}^{\{s\}} \setminus S_{\{1\}}^{(s)}$, inoltre per delle costanti C_0, c_0 indipendenti da $\rho>0$, h ed η°, è [3]

$$|\tilde{g}(\rho\eta^\circ)| = |\tilde{\psi}(0)|^{n-\ell}(C_0/h)^{\ell}(\rho/h)^{(-1+1/2s)\ell} \prod_j{}' |\eta_j^\circ|^{-1+1/2s}$$

$$\exp[-c_0(\rho/h)^{1/s} \sum_j{}' |\eta_j^\circ|](1+O((\rho/h)^{-1/2s}))$$

ove ℓ è il numero delle $\eta_j^\circ \neq 0$ $\prod_j{}'$ e $\sum_j{}'$ sono eseguite rispetto a questi j.

Per tale g non potrà quindi valere la (1.7) se $\sigma<s$ e se $\sigma=s$ quando $\varepsilon \in]0,c[$, non appena si scelga $h>0$ sufficientemente grande. Se si verifica (1.6) non potrà quindi accadere che per la soluzione u(t,x) di (1.2) sia $u(t^\circ,\cdot) \in S_{\{1\}}^{\{s\}'}$ per ogni $g \in S_{\{1\}}^{\{s\}}$. Si é così provata la

<u>Proposizione 1.2.</u> *Affinché il problema* (1.2) *sia ben posto in* $S_{\{1\}}^{\{s\}}$ *ed in* $S_{\{1\}}^{\{s\}'}$, $s\geq 1/p$, *è necessario che per ogni* $\sigma \in [1/p,s]$

(1.8) $$\underline{\lim}_{\rho\to+\infty} \rho^{-1/\sigma} \int_0^t \operatorname{Re} a(\tau,\rho\eta)d\tau \geq 0 \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } \quad \eta \in S_{n-1} = \{\eta \in R^n; |\eta|=1\}.$$

---

3) Si veda per es. [2] e [3].

<u>Corollario 1.3.</u> *Sia*

$$a(t,\xi) = \sum_{h=0}^{r} a_h(t,\xi),$$

con le a_h, $h=0,\dots,r$, *funzioni integrabili rispetto a* t *in* $[0,T]$ *per ogni* $\xi \in R^n$, *soddisfacenti la* (1.4) *con* p_h *in luogo di* p, $0=p_0<p_1<\dots<p_r<1$, *e per* $h = 1,\dots,r$ *omogenee in* ξ *di ordine* p_h *per* $|\xi|$ *abbastanza grande. Allora affinché il problema* (1.2) *sia ben posto in* $S^{\{s\}}_{\{1\}}$ *od in* $S^{\{s\}'}_{\{1\}}$, $s \geq 1/p$ *è necessario che per ogni* $t \in [0,T]$, $\eta \in S_{n-1}$

$$(1.8_r) \qquad \int_0^t \operatorname{Re} a_r(\tau,\eta)\, d\tau \geq 0$$

e

$$\int_0^t \operatorname{Re} a_h(\tau,\eta) d\tau \geq 0$$

per gli $h<r$ *tali che* $p_h \geq 1/s$ *se*

$$\int_0^t \operatorname{Re} a_j(\tau,\eta) d\tau = 0 \qquad j = h+1,\dots,r.$$

Se a_r è continua come funzione di t, (1.8_r) fornisce il risultato del Teorema 1.1 quando λ ed a non dipendono da x.

Notiamo infine che dalla (1.5) segue la

<u>Proposizione 1.4.</u> *Affinché il problema* (1.2) *sia ben posto in* $S^{\{s\}}_{\{1\}}$ *ed in* $S^{\{s\}'}_{\{1\}}$ *è sufficiente che*

$$(1.9) \qquad \forall t \in [0,T] \ \lim_{\rho \to +\infty} \rho^{-1/s} \int_0^t \operatorname{Re} a(\tau,\rho\eta) d\tau \geq 0 \ \textit{uniformemente rispetto ad } \eta \in S_{n-1}.$$

Ciò accade sempre se $s<1/p$ e per $s=1/p$ quando vale (1.8) con $\sigma=1/p$. Infatti come conse-

guenza della (1.4), esistono due costanti positive d, d' tali che

$$|a(t,\rho\eta^1)-a(t,\rho\eta^o)|\leq d\rho^p|\eta^1-\eta^o|, \eta^1,\eta^o\in S_{n-1}, \ |\eta^1-\eta^o|<d'$$

e dunque come conseguenza della (1.8) con $\sigma=1/p$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists c_\varepsilon>0$ tale che

$$\int_0^t \mathrm{Re}\ a(\tau,\xi)d\tau > -\varepsilon|\xi|^p-c_\varepsilon, \quad \xi\in R^n,\ t\in[0,T],$$

ossia (1.9). Dunque

Proposizione 1.5. *La* (1.8) *con* $\sigma=1/p$ *è necessaria e sufficiente affinché il problema* (1.2) *sia ben posto in* $S_{\{1\}}^{\{1/p\}}$ *ed in* $S_{\{1\}}^{\{1/p\}'}$.

§ 2. Consideriamo ora il problema

$$(2.1)\qquad \begin{cases}(\partial_t+i\Lambda(t,D_x)+A(t,D_x))u = 0 & \text{in } [0,T]\times R^n\\ u(o,x) = g(x) & x\in R^n\end{cases}$$

con $\Lambda(t,\xi)$ ed $A(t,\xi)$ matrici mxm, la prima hermitiana, i cui elementi siano funzioni integrabili rispetto a t in [0,T] soddisfacenti le (1.3), (1.4) rispettivamente.

Se $g\in(S_{\{1\}}^{(1/p)})^m$ oppure $g\in(S_{\{1\}}^{(1/p)'})^m$ e cerchiamo u(t,x) appartenente ad uno di questi spazi per ogni $t\in[0,T]$ deve essere

$$(2.2)\qquad \begin{cases} (\partial_t + i\Lambda(t,\xi) + A(t,\xi))\tilde{u}(t,\xi) = 0 & (t,\xi)\in[0,T]\times R^n \\ \tilde{u}(0,\xi) = g(\xi) & \xi\in R^n \end{cases} .$$

Posto

$$\mu_0(t,\xi) = \inf_{\substack{v\in C^m \\ |v|=1}} \mathrm{Re}((i\Lambda+A)(t,\xi)v,v) = \inf_{\substack{v\in C^m \\ |v|=1}} \mathrm{Re}(A(t,\xi)v,v)$$

e

$$\mu^0 = \sup_{\substack{v\in C^m \\ |v|=1}} \mathrm{Re}((i\Lambda+A)(t,\xi)v,v) = \sup_{\substack{v\in C^m \\ |v|=1}} \mathrm{Re}(A(t,\xi)v,v)$$

è noto che per le soluzioni di (2.2) valgono le maggiorazioni

$$(2.3)\qquad |\tilde{u}\,(t,\xi)| \leq |\tilde{u}(0,\xi)|\exp(-\int_0^t \mu_0(\tau,\xi)d\tau)$$

$$(2.3')\qquad |\tilde{u}(t,\xi)|\geq|\tilde{u}(0,\xi)|\exp(-\int_0^t \mu^0(\tau,\xi)d\tau) \qquad (t,\xi)\in[0,T]\times R^n$$

Osservato che esiste c>0 tale che

$$|\mu_0(t,\xi)|\ ,\ |\mu^0(t,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^p \qquad (t,\xi)\in[0,T]\times R^n$$

dalla (2.3) segue che *il problema (2.1) è ben posto in* $(S^{(1/p)}_{\{1\}})^m$ *ed in* $(S^{(1/p)'}_{\{1\}}{}^m)$.

Dalle (2.3') e (2.3) ragionando come per provare le Proposizioni 1.2 ed 1.4 si prova la

Proposizione 2.1. *Affinché il problema (2.1) sia ben posto in* $(S^{\{s\}}_{\{1\}})^m$ *od in* $(S^{\{s\}'}_{\{1\}})^m$, $s\geq 1/p$, *è necessario che per ogni* $\sigma\in[1/p,s]$

$$(2.4)\qquad \lim_{\rho\to+\infty} \rho^{-1/\sigma}\int_0^t \mu^0(\tau,\rho\eta)d\tau\geq 0 \qquad \forall(t,\eta)\in[0,T]\times S_{n-1}$$

ed è sufficiente che

$$(2.5)\quad \forall t\in[0,T]\ \lim_{\rho\to+\infty} \rho^{-1/\sigma}\int_0^t \mu_0(\tau,\rho\eta)d\tau\geq 0 \text{ uniformemente rispetto ad } \eta\in S_{n-1}.$$

La condizione necessaria (2.4) è evidentemente poco soddisfacente, anche se vale in ipotesi "abbastanza generali" su Λ ed A. Sarebbe interessante provare una condizione necessaria più forte ammettendo che $A(t,\rho\eta)$ *abbia soltanto autovalori semplici* per ogni $(t,\eta)\in[0,T]\times S_{n-1}$ e ρ sufficientemente grande.

Un caso in cui può ottenersi un miglioramento della (2.4) si ha supponendo che Λ sia omogenea in ξ di ordine 1 e come nel Corollario 1.3 che

$$A(t,\rho\eta) = \sum_{h=0}^{r} A_h(t,\eta)\rho^{p_h}$$

$0=p_0<p_1<\ldots<p_r<1$. Se $p_h = \frac{h}{k}$, con k intero > r, posto $\varepsilon=\rho^{-1/k}$ il sistema (2.2) si scrive

$$(2.6)\qquad (\varepsilon^k\partial_t+i\Lambda(t,\eta) + \sum_{h=0}^{r} A_h(t,\eta)\varepsilon^{k-h})\, u = 0 \quad .$$

Supposto che Λ *abbia soltanto autovalori semplici* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *e di più che* Λ *ed* A_h *siano analitiche in* t, da noti teoremi sul comportamento asintotico per $\varepsilon\to 0+$ delle soluzioni di (2.6)[4], si trae che (2.6) ha una matrice fondamentale di so

---

4) Si veda per es. W. Wasov [9].

luzioni $U(t,\eta,\varepsilon)$ tale che

$$U(t,\eta,\varepsilon) = V(t,\eta,\varepsilon)\exp(-Q(t,\eta,\varepsilon))$$

ove $V(t,\eta,\varepsilon) \sim \sum_{h=0}^{\infty} V_h(t,\eta)\varepsilon^h \quad \varepsilon\to 0+ \quad , \quad \det V_0(t,\eta) \neq 0,$

e $Q(t,\eta,\varepsilon)$ è una matrice diagonale della forma

$$Q(t,\eta,\varepsilon) = \sum_{h=1}^{k} Q_h(t,\eta)\varepsilon^{-h}$$

con $Q_k(t,\eta) = \mathrm{diag}(i\int_0^t \lambda_1(\tau,\eta)d\tau,\dots, i\int_0^t \lambda_m(\tau,\eta)d\tau).$

Da ciò segue che se $q_{k-1,i}(t,\eta)$, $i = 1,\dots,m$, sono gli elementi della diagonale della matrice Q_{k-1} *affinché il problema* (2.1) *sia ben posto in* $(S^{\{s\}}_{\{1\}})^m$ *od in* $(S^{\{s\}'}_{\{1\}})^m$, $s\geq 1/p_r$, *è necessario che*

$$\forall(t,\eta)\in[0,T]\times S_{n-1}\ ,\ \mathrm{Re}\, q_{k-1,i}(t,\eta)\geq 0 \quad , \quad i = 1,\dots,m.$$

Questo risultato tuttavia non si applica al caso dei sistemi 2x2 a cui si è accennato nel n. 1.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] F. COLOMBINI, E. De GIORGI, S. SPAGNOLO, Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 6 (1979), 511-559.

[2] M.V. FEDORYUK, Metod Perevala, Mosca 1977.

[3] H. KOMATSU, Irregularity of hyperbolic operators, Taniguchi Symp. HERT, Kataka 1984, 155-179.

[4] S. MIZOHATA, On the Cauchy Problem, Science Press, Beijing 1985.

[5] S. MIZOHATA, Microlocal energy method, Taniguchi Simp. HERT, Kataka 1984, 193-233.

[6] V.P. PALAMODOV, Trasformazione di Fourier di funzioni indefinitamente differenziabili fortemente crescenti, Trudy Mosk. Mat. Ŏbsč. 11 (1962), 309-350.

[7] S. SPAGNOLO, Analytic and Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for second order weakly hyperbolic equations with coefficients irregular in time, Taniguchi Symp. HERT, Kataka 1984, 363-380.

[8] K. TANIGUCHI, Fourier integral operators in Gevrey class on R^n and the fundamental solution for a hyperbolic operator, Publ. RIMS Kyoto Univ., 20 (1984), 491-542.

[9] W. WASOW, Linear Turning Point Theory, Springer 1985.